№ 2(46) 2026

НАФТОГАЗОВА ЕНЕРГЕТИКА

ISSN 1993-9868 print
ISSN 2415-3109 online

https://nge.nung.edu.ua

Прийнято 17.11.2026. Прорецензовано 18.11.2026. Опубліковано 30.11.2026.

УДК 622.276:519.63 **DOI: 10.31471/1993-9868-2026-2(46)-252-262**

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ КОНВЕКТИВНО-РЕЛАКСАЦІЙНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСУ ТА ПРОДУКТИВНОСТІ СВЕРДЛОВИНИ ПРИ ВНУТРІШНЬОПЛАСТОВОМУ ГОРІННІ

Бандура А. І.
Доктор фізико-математичних наук, професор
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
76019, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, Україна
https://orcid.org/0000-0003-0598-2237
e-mail: andriy.bandura@nung.edu.ua

Смоловик Л. Р. *
Кандидат технічних наук, доцент
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
76019, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, Україна
https://orcid.org/0000-0003-4451-4508
e-mail: liliana.smolovyk@nung.edu.ua

Копилов Д. О.
Аспірант
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
76019, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, Україна
https://orcid.org/0009-0003-5192-3702
e-mail: dmytro.kopylov-ngitphd@nung.edu.ua

Анотація. Метою статті є побудова аналітичного розв'язку двотемпературної задачі конвективно-релаксаційного теплопереносу при циклічному внутрішньопластовому горінні високов'язкої нафти та виведення інженерно-аналітичних співвідношень для оцінки приросту дебіту видобувної свердловини. Розглянуто формування температурного поля в однорідному нафтонасиченому пласті в умовах високих значень числа Пекле для газорідинного теплоносія, коли його власною молекулярною теплопровідністю можна знехтувати порівняно з поздовжньою теплопровідністю мінерального скелета породи. У математичній моделі враховано локальну теплову нерівноважність між рухомим флюїдом і твердою матрицею колектора, а також лінійні тепловтрати у непроникну покрівлю та підошву продуктивного пласта за схемою Ньютона — Ловер'є. Шляхом переходу до рухомої системи координат, пов'язаної з фронтом горіння, і локалізації вузької зони окислення коксу точковим джерелом тепла вихідну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних четвертого порядку зведено до звичайного диференціального рівняння третього порядку з умовами зшивання похідних на фронті. В адіабатичному наближенні характеристичне рівняння розкладається на нульовий корінь та квадратний тричлен із додатною дискримінантною формою, що дозволило отримати замкнені елементарні формули для розподілу температур фаз, хвилі міжфазного температурного напору та координати

Запропоноване посилання: Бандура, А. І., Смоловик, Л. Р. & Копилов, Д. О. (2026). Аналітична модель конвективно-релаксаційного теплопереносу та продуктивності свердловини при внутрішньопластовому горінні. Нафтогазова енергетика, 2(46), 252-262. doi: 10.31471/1993-9868-2026-2(46)-252-262.

* Відповідальний автор

Copyright © The Author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

її максимуму попереду фронту горіння. Методом збурень показано, що врахування бічних тепловтрат зміщує нульовий характеристичний корінь в область малих додатних значень. Це фізично обґрунтовує зниження пікової температури на фронті з адіабатичних 1530 °C до реалістичних пластових значень 698,5–1158,6 °C, формування локального температурного максимуму та рекуперацію тепла у вигорілій зоні, де скелет породи остигає повільніше за газовий потік. На основі методу сумарних фільтраційних опорів встановлено, що просування фронту горіння на 20–35 м з урахуванням конвективного ореолу шириною 6,75–8,19 м забезпечує зростання дебіту свердловини у 4,5–7,5 рази за рахунок зниження в'язкості нафти.

Ключові слова: високов'язка нафта; міжфазний теплообмін; двотемпературне пористе середовище; характеристичне рівняння третього порядку; тепловтрати пласта; міжфазна теплова нерівноважність.

Вступ та зв'язок із попередніми дослідженнями

Залучення до промислової розробки покладів важких і високов'язких нафт в умовах виснаження традиційних родовищ вуглеводнів є актуальним питанням сьогодення. Застосування термічних методів підвищення нафтовилучення неодноразово описувалося у вітчизняних і закордонних наукових джерелах: нагнітання гарячого теплоносія, пароциклічне оброблення свердловини, внутрішньопластове горіння, електропрогрів привибійної зони і стовбура свердловин. Однак на сьогодні окремі методи потребують певного вдосконалення. Для родовищ із розрідженою сіткою свердловин перспективною технологією є циклічне внутрішньопластове горіння (ВПГ), яке полягає у періодичному закачуванні окисника (повітря) у видобувну свердловину, ініціюванні екзотермічного горіння частини важких фракцій нафти у привибійній зоні та подальшому відборі розігрітої малов'язкої нафти тією ж свердловиною [1], [3].

У роботі [1] сформульовано базову математичну модель процесу циклічного ВПГ, яка спирається на двотемпературний опис пористого середовища (окремі рівняння енергії для рухомого теплоносія з температурою $t(x,\tau)$ та скелета породи з температурою $\theta(x,\tau)$), рівняння вигоряння палива та гідродинамічні співвідношення двофазної фільтрації.

Висвітлення невирішених раніше частин загальної проблеми

Попри значний обсяг чисельних і експериментальних результатів [1–3, 5], чисельна реалізація двотемпературної моделі циклічного ВПГ [1] виявила дві важливі фізико-математичні особливості, які досі не отримали замкненого аналітичного обґрунтування:

1. В адіабатичному наближенні (без урахування теплообміну з вміщуючими породами) розрахункова температура на фронті горіння сягає близько $2000^{\circ}\mathrm{C}$, що, як відзначено в [1], істотно перевищує реальні пластові показники ($700\ldots1150^{\circ}\mathrm{C}$) внаслідок нехтування тепловтратами у покрівлю та підошву пласта.

2. На профілі розподілу температури скелета породи по довжині пласта формується виражений локальний максимум, приурочений до положення фронту горіння, причому остигання твердого скелета породи у вигорілій зоні відбувається значно повільніше за охолодження газового потоку, що зумовлює ефект рекуперації тепла [1], [3].

Крім того, інженерні методики оцінки дебіту свердловини після теплового впливу часто спираються на ступінчасту апроксимацію прогрітої зони без аналітичного врахування протяжного конвективного ореолу попереду фронту горіння, сформованого в умовах локальної теплової нерівноважності фаз.

Мета та завдання дослідження

Метою статті є побудова наочного аналітичного розв'язку двотемпературної задачі конвективно-релаксаційного теплопереносу при циклічному внутрішньопластовому горінні високов'язкої нафти у граничному випадку домінуючої конвекції в газоріднній фазі з урахуванням тепловтрат у покрівлю та підошву пласта, а також виведення інженерно-аналітичних співвідношень для оцінки приросту дебіту свердловини.

Для досягнення поставленої мети сформульовано такі основні завдання дослідження.

1. Виконати асимптотичну редукцію двотемпературної системи рівнянь теплопереносу в пористому середовищі за умов високих значень числа Пекле для теплоносія ($\mathrm{Pe}_1 \gg 1$) та звести задачу в рухомих координатах до звичайного диференціального рівняння третього порядку з умовами зшивання похідних на фронті горіння;

2. Отримати точні аналітичні вирази для температурних профілів газоріднної фази й скелета породи в адіабатичному наближенні, а також визначити координату й амплітуду максимуму хвилі міжфазного температурного напору попереду фронту горіння;

3. Методом збурень дослідити вплив лінійних тепловтрат у вміщуючі породи на спектр характеристичного рівняння та аналітично обґрунтувати формування температурного піка на фронті й рекуперативний теплообмін у вигорілій зоні;

4. Вивести на основі методу сумарних фільтраційних опорів аналітичну формулу для коефіцієнта відносного приросту дебіту видобувної свердловини з урахуванням ширини конвективного ореолу прогріву та виконати чисельний аналіз отриманих закономірностей.

Алгоритм реалізації завдань передбачає послідовний перехід від фізичної оцінки співвідношення теплопровідностей фаз до перетворення диференціальних операторів у системі координат, пов'язаній із фронтом горіння, інтегрування крайової задачі методом характеристичних коренів, асимптотичне розкладання розв'язку за малим параметром бічних тепловтрат, інтегрування поля в'язкості нафти за радіусом пласта та верифікацію аналітичних формул розрахунками для типових параметрів нафтового колектора.

Аналіз сучасних закордонних і вітчизняних досліджень та публікацій

Внутрішньопластове горіння є перспективним тепловим методом підвищення нафтовилучення, особливо під час розробки родовищ високов'язкої та важкої нафти [2], [4]. Сучасні закордонні дослідження спрямовані на вивчення фізико-хімічних механізмів окиснення нафти, кінетики реакцій та умов формування стабільного фронту горіння [2]. Значна увага приділяється експериментальному дослідженню температурних полів, утворення коксових відкладень і поширення теплового фронту в пористому середовищі [4]. У роботах останніх років активно розвиваються математичні моделі, які враховують взаємозв'язок фільтрації флюїдів, теплоперенесення та хімічних реакцій [4, 6]. Окремий напрямок досліджень стосується впливу пористості, проникності та мінералогічного складу порід на ефективність внутрішньопластового горіння [6]. Важливим чинником є теплообмін між нафтовим пластом і вміщуючими породами, оскільки тепловтрати через покрівлю та підошву можуть істотно знижувати ефективність процесу [6]. У вітчизняних дослідженнях також розглядаються фізико-хімічні методи інтенсифікації видобутку важких нафт, зокрема застосування гетерогенних каталізаторів для внутрішньопластової каталітичної деструкції [4]. Застосування такого підходу до процесів циклічного ВПГ у вітчизняних дослідженнях започатковано в роботі [1], де сформульовано базову систему рівнянь енергії для рухомого теплоносія та скелета породи разом із рівняннями кінетики вигоряння палива і двофазної фільтрації. Водночас критичний аналіз результатів чисельного моделювання [1, 2] показує, що моделі без належного аналітичного аналізу бічного теплообміну схильні завищувати розрахункову температуру на фронті горіння через спрощений опис відведення тепла у вміщуючі породи. Зокрема, у публікаціях [2, 6, 8] наголошується, що тепловтрати через покрівлю та підошву продуктивного пласта за схемою Ньютона — Ловер'є істотно змінюють температурний профіль у вигорілій зоні та знижують пікову температуру горіння, що необхідно враховувати під час інженерного прогнозування приросту продуктивності свердловин. Особливо актуальним є дослідження впливу температурного режиму, витрати повітря, кінетики окиснення та температурної залежності в'язкості нафти на поширення фронту горіння. Отже, перспективним напрямом подальших досліджень є розроблення математичних моделей тепло- і масоперенесення під час внутрішньопластового горіння високов'язкої нафти для обґрунтування технологічних параметрів підвищення нафтовилучення.

Висвітлення основного матеріалу дослідження

Розглянемо процес поширення плоского або квазірадіального фронту горіння у однорідному пористому пласті товщиною H та пористістю m. Фізичний аналіз теплофізичних параметрів показує, що коефіцієнт молекулярної теплопровідності повітряно-газової суміші ($\lambda_1 \approx 0.03\ldots0.08 \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) майже на два порядки менший за коефіцієнт теплопровідності мінерального скелета пісковику ($\lambda_2 \approx 2.5\ldots3.5 \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) [2, 5]. Тому для теплоносія безрозмірне число Пекле є великим ($\text{Pe}_1 = \dfrac{m\rho_1 c_1 wL}{\lambda_1} \gg 1$), що дозволяє знехтувати кондуктивним доданком $\lambda_1 \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ у рівнянні енергії флюїду, зберігши поздовжню теплопровідність скелета породи $\lambda_2 \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ [4, 6].

Повна система диференціальних рівнянь двотемпературної фільтраційної конвекції з урахуванням кондуктивної теплопровідності

обох фаз описується диференціальними операторами другого порядку за просторовою координатою для кожного рівняння теплового балансу, що відповідає загальному четвертому порядку системи. Проте завдяки умові $\mathrm{Pe}_1 \gg 1$ нехтування кондуктивним перенесенням у газоріднній фазі знижує порядок рівняння флюїду до першого.

Тоді система рівнянь двотемпературного теплопереносу [1], доповнена доданком лінійних тепловтрат у непроникні покрівлю і підошву пласта за схемою Ньютона — Ловер'є [2], набуває вигляду:

$$-m\rho_1 c_1 w\frac{\partial t}{\partial x} - m\rho_1 c_1\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(t-\theta\right), \qquad (1)$$

$$\lambda_2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \left(1-m\right)\rho_2 c_2\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \\ = a\left(\theta - t\right) + \gamma_{\text{втр}}\left(\theta - T_{\text{пл}}\right) - q_v\left(\theta, S_n\right), \qquad (2)$$

$$m\frac{\partial}{\partial\tau}\left(S_n\rho_n\right) = -R_n\left(\theta, S_n\right), \qquad (3)$$

де $t\left(x,\tau\right)$ і $\theta\left(x,\tau\right)$ — температури теплоносія та скелета породи; $T_{\text{пл}}$ — початкова пластова температура; w — швидкість руху теплоносія; $a>0$ — об'ємний коефіцієнт міжфазного теплообміну; $\gamma_{\text{втр}} = \dfrac{2\alpha_{\text{п}}}{H} \geq 0$ — об'ємний коефіцієнт тепловтрат через покрівлю і підошву пласта ($\alpha_{\text{п}}$ — коефіцієнт теплопередачі у вміщуючі породи); $q_v = h_c R_n$ — об'ємна потужність тепловиділення при згорянні коксу з питомою теплотою згоряння h_c.

Перейдемо до рухомої системи координат $\xi = x - w_f\tau$, прив'язаної до фронту горіння, що рухається зі сталою швидкістю $w_f > 0$, та введемо надлишкові температури фаз понад пластову температуру:

$$\tilde{t}\left(\xi\right) = t\left(\xi\right) - T_{\text{пл}}, \qquad \tilde{\theta}\left(\xi\right) = \theta\left(\xi\right) - T_{\text{пл}}. \qquad (4)$$

Використовуючи позначення для конвективних потоків теплоємності у рухомих координатах:

$$U_1 = m\rho_1 c_1\left(w - w_f\right) > 0, \\ U_2 = \left(1-m\right)\rho_2 c_2 w_f > 0, \qquad (5)$$

та апроксимуючи вузьку зону інтенсивного окислення палива у перерізі $\xi = 0$ точковим джерелом $q_v\left(\xi\right) = Q\delta\left(\xi\right)$ (де $Q = h_c m\rho_n S_{n0} w_f$ — інтегральна питома потужність тепловиділення на фронті [7], [6]), запишемо систему (1)–(2) у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$-U_1\frac{d\tilde{t}}{d\xi} - a\left(\tilde{t} - \tilde{\theta}\right) = 0, \qquad (6)$$

$$\lambda_2\frac{d^2\tilde{\theta}}{d\xi^2} + U_2\frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} - a\left(\tilde{\theta} - \tilde{t}\right) - \gamma_{\text{втр}}\tilde{\theta} = -Q\delta\left(\xi\right). \qquad (7)$$

З рівняння першого порядку (6) температура скелета породи $\tilde{\theta}\left(\xi\right)$ виражається явно через температуру теплоносія та її першу похідну:

$$\tilde{\theta}\left(\xi\right) = \tilde{t}\left(\xi\right) + \ell_1\frac{d\tilde{t}}{d\xi}, \\ \ell_1 = \frac{U_1}{a} = \frac{m\rho_1 c_1\left(w - w_f\right)}{a} > 0, \qquad (8)$$

де параметр ℓ_1 має фізичний зміст характеристичної довжини теплової релаксації потоку флюїду. Підстановка співвідношення (8) у рівняння (7) дозволяє редукувати вихідну систему до єдиного скалярного лінійного диференціального рівняння третього порядку відносно $\tilde{t}\left(\xi\right)$:

$$\lambda_2\ell_1\frac{d^3\tilde{t}}{d\xi^3} + \left(\lambda_2 + U_2\ell_1\right)\frac{d^2\tilde{t}}{d\xi^2} + \\ + \left(U_2 - U_1 - \gamma_{\text{втр}}\ell_1\right)\frac{d^2\tilde{t}}{d\xi^2} - \gamma_{\text{втр}}\tilde{t} = -Q\delta\left(\xi\right). \qquad (9)$$

Сформулюємо умови зшивання розв'язків у перерізі фронту горіння $\xi = 0$. Послідовне інтегрування рівнянь (6)–(7) за нескінченно малим інтервалом $\left[-\delta, +\delta\right]$ при $\delta \to 0$ дає умови для розривів похідних. Оскільки рівняння (6) не містить дельта-подібних джерел, функція $\tilde{t}\left(\xi\right)$ є неперервною: $[\tilde{t}]_{\xi=0} = 0$. З неперервності температури скелета породи $[\tilde{\theta}]_{\xi=0} = 0$ та співвідношення (8) випливає неперервність першої похідної температури флюїду: $\left[\dfrac{d\tilde{t}}{d\xi}\right]_{\xi=0} = 0$. Інтегрування рівняння (7) з урахуванням властивості $\int_{-\delta}^{+\delta}\delta\left(\xi\right)d\xi = 1$ визначає стрибок теплового потоку в скелеті породи $\lambda_2\left[\dfrac{d\tilde{\theta}}{d\xi}\right]_{\xi=0} = -Q$, що при підстановці $\tilde{\theta}' = \tilde{t}' + \ell_1\tilde{t}''$ задає умову стрибка другої похідної:

$$\left[\tilde{t}\right]_{\xi=0}=0,\qquad \left[\frac{d\tilde{t}}{d\xi}\right]_{\xi=0}=0,$$
$$\left[\frac{d^2\tilde{t}}{d\xi^2}\right]_{\xi=0}=-\frac{Q}{\lambda_2\ell_1}=-\frac{aQ}{\lambda_2U_1}. \tag{10}$$

Точний аналітичний розв'язок в адіабатичному наближенні ($\gamma_{втр}=0$)

Дослідимо спочатку базовий теплоізольований випадок ($\gamma_{\text{втр}}=0$), який відповідає постановці роботи [1]. При $\gamma_{\text{втр}}=0$ рівняння (9) набуває вигляду:

$$\lambda_2U_1\frac{d^3\tilde{t}}{d\xi^3}+\left(a\lambda_2+U_1U_2\right)\frac{d^2\tilde{t}}{d\xi^2}+ +a\left(U_2-U_1\right)\frac{d\tilde{t}}{d\xi}=-aQ\delta\left(\xi\right). \tag{11}$$

Підстановка частинних розв'язків однорідного рівняння у формі $\tilde{t}\left(\xi\right)=e^{\mu\xi}$ при $\xi\neq0$ приводить до характеристичного рівняння третього степеня, яке розкладається на множники:

$$\mu\left(\lambda_2U_1\mu^2+\left(a\lambda_2+U_1U_2\right)\mu+a\left(U_2-U_1\right)\right)=0. \tag{12}$$

Спектр редукованої задачі містить нульовий корінь $\mu_0=0$ та два корені квадратного тричлена μ_1,μ_2. Дискримінант квадратного тричлена в (12) перетворюється до суми квадратів:

$$D=(a\lambda_2+U_1U_2)^2-4a\lambda_2U_1\left(U_2-U_1\right)= =(a\lambda_2-U_1U_2)^2+4a\lambda_2U_1^2>0. \tag{13}$$

Завдяки строгій додатності дискримінанта (13) корені μ_1,μ_2 є дійсними числами:

$$\mu_{1,2}=\frac{-\left(a\lambda_2+U_1U_2\right)\mp\sqrt{(a\lambda_2-U_1U_2)^2+4a\lambda_2U_1^2}}{2\lambda_2U_1}. \tag{14}$$

У режимі повільного просування фронту ($U_2>U_1$) сума коренів є від'ємною, а їхній добуток за теоремою Вієта — додатним:

$$\mu_1\mu_2=\frac{a\left(U_2-U_1\right)}{\lambda_2U_1}>0\ \ при\ \ \mu_1<\mu_2<0. \tag{15}$$

Оскільки обидва корені μ_1,μ_2 є від'ємними, експоненти $e^{\mu_1\xi}$ та $e^{\mu_2\xi}$ зростають при $\xi\to-\infty$. З умови обмеженості температури позаду фронту горіння ($\xi<0$) залишається лише постійна мода $\mu_0=0$, а попереду фронту ($\xi\geq0$) розв'язок шукається у вигляді суперпозиції спадних експонент:

$$\tilde{t}\left(\xi\right)=\begin{cases}\Delta T_{\text{ад}}, & \xi<0,\\ B_1e^{\mu_1\xi}+B_2e^{\mu_2\xi}, & \xi\geq0.\end{cases} \tag{16}$$

Підставляючи (16) в умови зшивання (10) при $\xi=0$, отримуємо лінійну алгебраїчну систему для сталих B_1,B_2 та адіабатичного розігріву $\Delta T_{\text{ад}}$:

$$\begin{cases}B_1+B_2=\Delta T_{\text{ад}},\\ \mu_1B_1+\mu_2B_2=0,\\ \mu_1^2B_1+\mu_2^2B_2=-\dfrac{aQ}{\lambda_2U_1}.\end{cases} \tag{17}$$

Розв'язавши останні два рівняння системи (17) з урахуванням (15), знаходимо:

$$B_1=-\frac{aQ}{\lambda_2U_1\mu_1\left(\mu_1-\mu_2\right)}=\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\Delta T_{\text{ад}}<0,$$
$$B_2=-\frac{\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\Delta T_{\text{ад}}>0, \tag{18}$$

де адіабатичний перепад температури становить $\Delta T_{\text{ад}}=B_1+B_2=\dfrac{Q}{U_2-U_1}$.

За допомогою співвідношення (8) отримуємо вирази для розподілу температур флюїду $t\left(\xi\right)$ та скелета породи $\theta\left(\xi\right)$:

$$t\left(\xi\right)=T_{\text{пл}}+\Delta T_{\text{ад}}\begin{cases}1, & \xi<0,\\ \dfrac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}e^{\mu_1\xi}-\dfrac{\mu_1}{\mu_2-\mu_1}e^{\mu_2\xi}, & \xi\geq0\end{cases} \tag{19}$$

$$\theta\left(\xi\right)=T_{\text{пл}}+\Delta T_{\text{ад}}\begin{cases}1, & \xi<0,\\ \dfrac{\mu_2\left(1+\ell_1\mu_1\right)}{\mu_2-\mu_1}e^{\mu_1\xi}- & \\ -\dfrac{\mu_1\left(1+\ell_1\mu_2\right)}{\mu_2-\mu_1}e^{\mu_2\xi}, & \xi\geq0\end{cases} \tag{20}$$

Різниця рівнянь (19) і (20) визначає профіль хвилі міжфазної температурної нерівноважності $\Delta T_{\text{міжф}}\left(\xi\right)=t\left(\xi\right)-\theta\left(\xi\right)$ попереду фронту горіння ($\xi\geq0$):

$$\Delta T_{\text{міжф}}\left(\xi\right)=t\left(\xi\right)-\theta\left(\xi\right)=-\ell_1\frac{dt}{d\xi}= =\frac{Q}{\lambda_2\left(\mu_2-\mu_1\right)}\left(e^{\mu_2\xi}-e^{\mu_1\xi}\right)\geq0. \tag{21}$$

Прирівнюючи похідну $d\left(\Delta T_{\text{міжф}}\right)/d\xi$ до нуля, находимо точку $\xi_{\max}$, у якій температурний напір між газами та породою досягає максимуму:

$$\xi_{\max}=\frac{\ln\left(\mu_1/\mu_2\right)}{\mu_2-\mu_1}>0,$$
$$\Delta T_{\text{міжф,max}}=\frac{Q}{\lambda_2\left|\mu_1\right|}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}}. \tag{22}$$

Вплив тепловтрат у покрівлю і підошву пласта ($\gamma_{втр}>0$) та формування температурного піка

Врахуємо теплообмін пласта з вміщуючими породами ($\gamma_{\text{втр}}>0$). У цьому випадку характеристичне рівняння набуває вигляду:

$$\lambda_2\ell_1\mu^3+\left(\lambda_2+U_2\ell_1\right)\mu^2+$$
$$+\left(U_2-U_1-\gamma_{\text{втр}}\ell_1\right)\mu-\gamma_{\text{втр}}=0. \tag{23}$$

Оскільки інтенсивність бічних тепловтрат є малою порівняно з міжфазним теплообміном ($\varepsilon_\gamma=\frac{\gamma_{\text{втр}}}{a}\ll 1$), застосуємо метод збурень. Нульовий корінь $\mu_0=0$ адіабатичної задачі зміщується в область додатних значень. Розкладаючи многочлен (23) у ряд Тейлора в околі $\mu=0$ та їх нехтуючи членами $\mathcal{O}\left(\mu^2\right)$, отримуємо малий додатний корінь $\mu_0\left(\gamma_{\text{втр}}\right)>0$:

$$\mu_0\approx\frac{\gamma_{\text{втр}}}{U_2-U_1-\gamma_{\text{втр}}\ell_1+\dfrac{\lambda_2\gamma_{\text{втр}}}{U_2-U_1}}\approx\frac{\gamma_{\text{втр}}}{U_2-U_1}>0. \tag{24}$$

Наявність додатного кореня $\mu_0>0$ якісно змінює температурне поле позаду фронту горіння ($\xi<0$): замість адіабатичного плато формується експоненційний спад температури у вигорілій зоні:

$$t\left(\xi\right)=T_{\text{пл}}+\Delta T_{\text{ф}}\left(\gamma_{\text{втр}}\right)\begin{cases}\exp\left(\mu_0\xi\right), & \xi<0,\\ \dfrac{\mu_2-\mu_0}{\mu_2-\mu_1}e^{\mu_1\xi}- & \\ -\dfrac{\mu_1-\mu_0}{\mu_2-\mu_1}e^{\mu_2\xi}, & \xi\geq 0,\end{cases} \tag{25}$$

де амплітуда розігріву на фронті $\Delta T_{\text{ф}}\left(\gamma_{\text{втр}}\right)=t(-T_{\text{пл}}$ обчислюється з умови стрибка другої похідної (10):

$$\Delta T_{\text{ф}}\left(\gamma_{\text{втр}}\right)=\frac{aQ}{\lambda_2U_1\left(\mu_0-\mu_1\right)\left(\mu_0-\mu_2\right)}=$$
$$=\frac{\Delta T_{\text{ад}}}{\left(1+\dfrac{\mu_0}{\left|\mu_1\right|}\right)\left(1+\dfrac{\mu_0}{\left|\mu_2\right|}\right)}<\Delta T_{\text{ад}}. \tag{26}$$

Співвідношення (26) надає математичне обґрунтування спостережуваним ефектам:

1. При врахуванні бічних тепловтрат ($\mu_0>0$) пікова температура зменшується у $\left(1+\dfrac{\mu_0}{\left|\mu_1\right|}\right)\left(1+\dfrac{\mu_0}{\left|\mu_2\right|}\right)$ разів порівняно з адіабатичним значенням $\Delta T_{\text{ад}}$, узгоджуючись із пластовими вимірюваннями ($700\ldots1100^\circ\text{C}$).

2. Позаду фронту горіння ($\xi<0$) виникає різниця температур фаз:

$$\theta\left(\xi\right)-t\left(\xi\right)=\ell_1\frac{dt}{d\xi}=\ell_1\mu_0\Delta T_{\text{ф}}e^{\mu_0\xi}>0$$
$$(\xi<0).$$

У вигорілій зоні твердий скелет породи накопичує теплову енергію і стає більш гарячим за охолоджений повітряний потік ($\theta>t$). Внаслідок цього матриця працює як рекуператор, передаючи акумульоване тепло холодній газовій фазі, що рухається до фронту.

Оцінка приросту дебіту свердловини методом сумарних фільтраційних опорів

На етапі відбору нафти після нагнітання окисника продуктивність свердловини зростає внаслідок зниження в'язкості нафти $\mu_p\left(t\right)=\mu_{\text{пл}}\exp\left[-\beta\left(t-T_{\text{пл}}\right)\right]$ у прогрітій зоні радіуса $r_f=w_f\tau_{\text{нагн}}$ [1], [2]. За методом сумарних фільтраційних опорів для плоскорадіального припливу у круговому пласті радіуса $R_{\text{к}}$ опір складається з опору прогрітої зони $r\in\left[r_c,r_f+L_{\text{еф}}\right]$ та холодної зони $r\in\left[r_f+L_{\text{еф}},R_{\text{к}}\right]$:

$$\eta_Q=\frac{Q_{\text{доб}}}{Q_{\text{доб,0}}}=\frac{\ln\left(R_{\text{к}}/r_c\right)}{\dfrac{\mu_{\text{сер}}}{\mu_{\text{пл}}}\ln\left(\dfrac{r_f+L_{\text{еф}}}{r_c}\right)+\ln\left(\dfrac{R_{\text{к}}}{r_f+L_{\text{еф}}}\right)}, \tag{27}$$

де $\dfrac{\mu_{\text{сер}}}{\mu_{\text{пл}}}\approx\exp\left(-\beta\Delta T_{\text{ф}}\right)\ll 1$, а ефективна ширина конвективного ореолу попереду фронту горіння визначається повільною модою μ_2:

Таблиця 1 – Розрахункові параметри температурної хвилі при різних значеннях коефіцієнта тепловтрат $\gamma_{\text{втр}}$

Режим теплообміну пласта	$\gamma_{втр}$, Вт/(м$^3\cdot$К)	Корінь μ_0, м$^{-1}$	Пік на фронті $T_ф$, °С	Ореол $L_{еф}$, м
1. Адіабатичний пласт [1]	0.0	0.0000	1530.0	8.19
2. Потужний пласт ($H=15$м)	2.0	+0.1680	1158.6	7.68
3. Середній пласт ($H=8$м)	5.0	+0.3650	906.4	7.23
4. Тонкий пласт ($H=4$м)	10.0	+0.6180	698.5	6.75

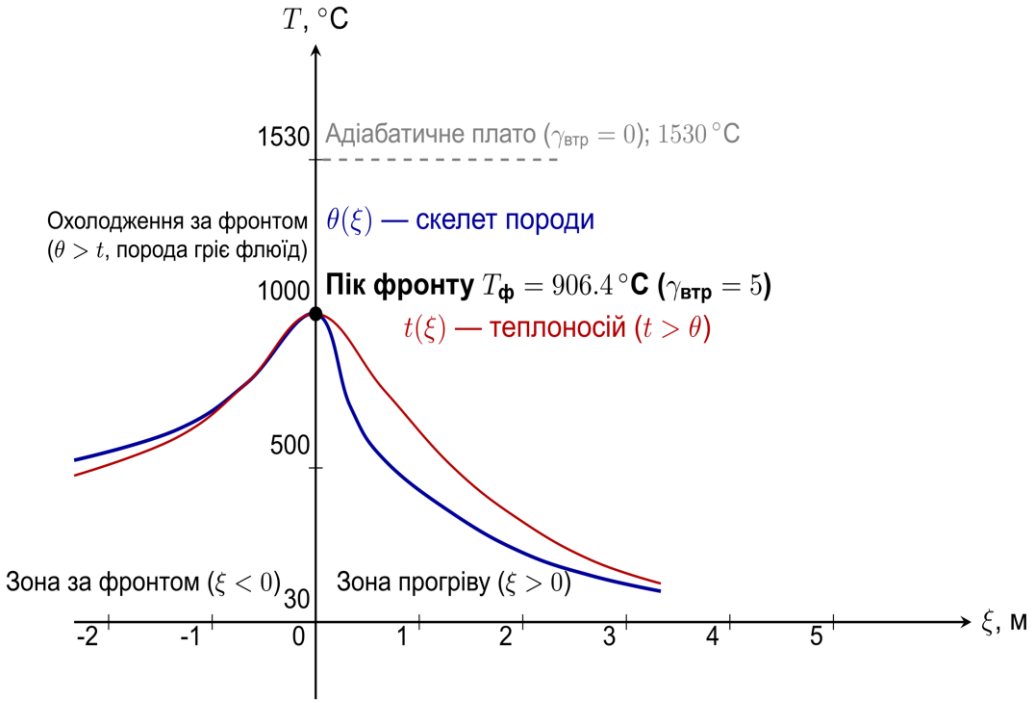


Рисунок 1 – Профілі температур теплоносія $t(\xi)$ і скелета породи $\theta(\xi)$ без урахування ($\gamma_{\text{втр}}=0$) та з урахуванням тепловтрат у покрівлю і підошву пласта ($\gamma_{\text{втр}}=5.0\text{Вт}/\left(\text{м}^3\cdot\text{К}\right)$)

$$L_{\text{еф}}=\frac{\gamma_{\text{E}}+\ln\left(\beta\Delta T_{\text{ф}}\dfrac{|\mu_1|}{|\mu_1|-|\mu_2|}\right)}{|\mu_2|}, \qquad (28)$$

$$\gamma_{\text{E}}\approx 0.5772.$$

Чисельний аналіз та графічна ілюстрація результатів

Обчислення за виведеними формулами виконано при базових параметрах пласта: $m=0.25$, $T_{\text{пл}}=30^{\circ}\text{C}$, $\lambda_2=3.0\text{Вт}/\left(\text{м}\cdot\text{К}\right)$, $U_1=10.0\text{Вт}/\left(\text{м}^2\cdot\text{К}\right)$, $U_2=20.0\text{Вт}/\left(\text{м}^2\cdot\text{К}\right)$, $a=12.0\text{Вт}/\left(\text{м}^3\cdot\text{К}\right)$, $Q=15000\text{Вт}/\text{м}^2$, $\Delta T_{\text{ад}}=1500^{\circ}\text{C}$.

Характеристична довжина релаксації дорівнює $\ell_1=\dfrac{U_1}{a}=0.8333\text{м}$. Розв'язок квадратного рівняння дає значення коренів: $\mu_1=-7.3202\text{м}^{-1}$, $\mu_2=-0.5464\text{м}^{-1}$. Коефіцієнти амплітуд у формулах (19)–(20) становлять $B_1=-121.0^{\circ}\text{C}$, $B_2=+1621.0^{\circ}\text{C}$, а розраховані значення параметрів хвилі наведено у табл. 1.

На рисунку 1 наведено профілі температур фаз $t(\xi)$ та $\theta(\xi)$ для адіабатичного режиму та з урахуванням тепловтрат ($\gamma_{\text{втр}}=5.0\text{Вт}/\left(\text{м}^3\cdot\text{К}\right)$). Моделювання з урахуванням бічних тепловтрат відображає формування куполоподібного піка температури породи в околі $\xi=0$.

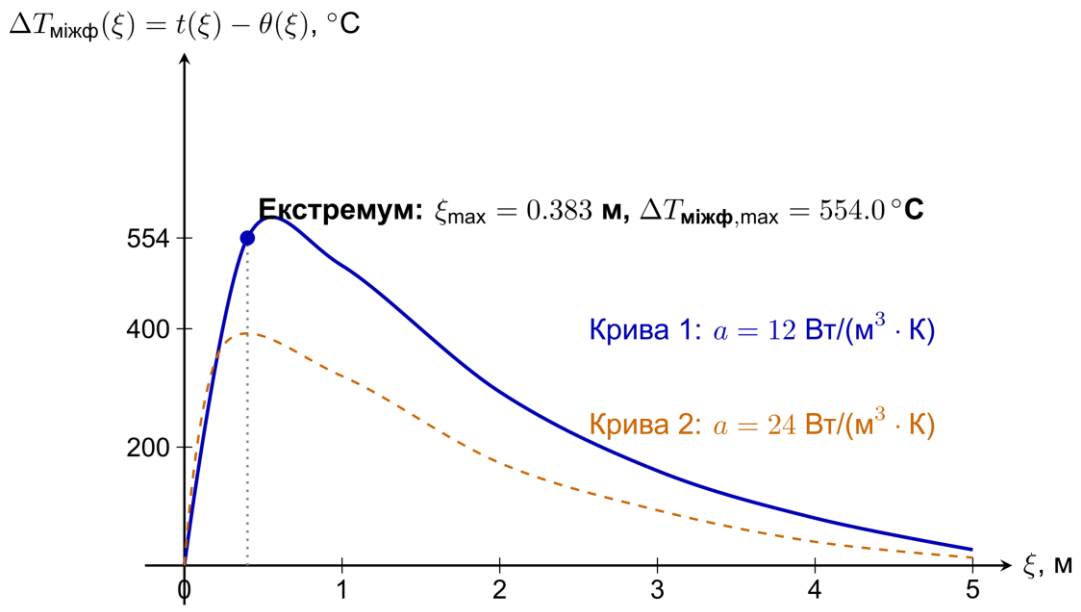


Рисунок 2 – Профіль хвилі міжфазної температурної нерівноважності $\Delta T_{\text{міжф}}(\xi) = t(\xi) - \theta(\xi)$ попереду фронту горіння та зміщення координати її максимуму $\xi_{\max}$ при зміні коефіцієнта теплообміну a

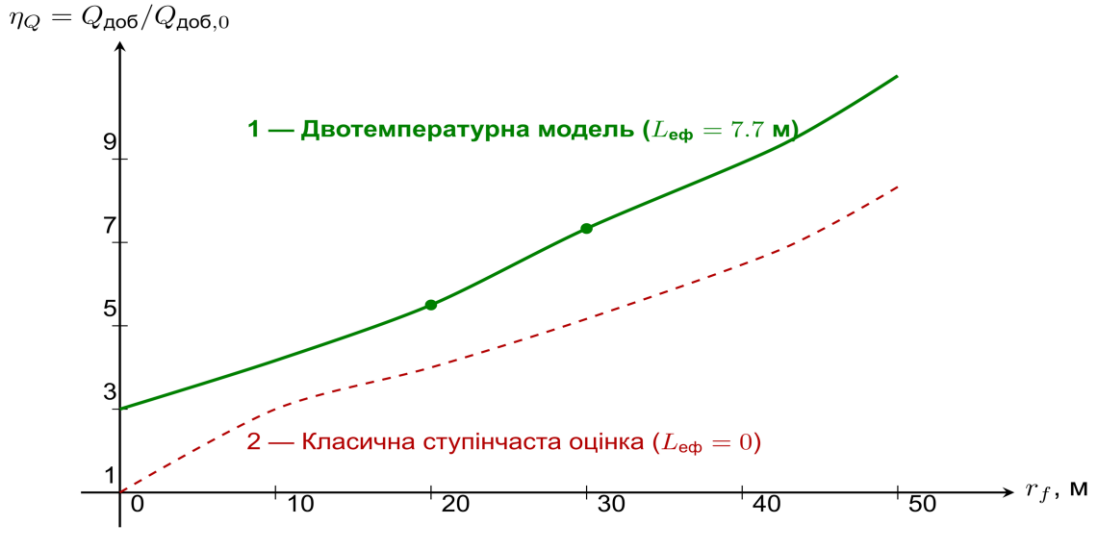


Рисунок 3 – Залежність відносного приросту дебіту свердловини η_Q від радіуса просування фронту горіння r_f з урахуванням (крива 1) та без урахування (крива 2) конвективного ореолу прогріву попереду фронту

На рисунку 2 зображено просторовий розподіл хвилі міжфазної температурної нерівноважності $\Delta T_{\text{міжф}}(\xi)$ попереду фронту для двох значень $a = 12$ та $a = 24 \text{Вт}/\left(\text{м}^3 \cdot \text{К}\right)$. Згідно з (22), при $a = 12 \text{Вт}/\left(\text{м}^3 \cdot \text{К}\right)$ максимум температурного напору досягається на відстані $\xi_{\max} = 0.383 \text{м}$ попереду фронту і становить $\Delta T_{\text{міжф,max}} = 554.0^{\circ}\text{C}$. При зростанні коефіцієнта теплообміну вдвічі точка максимуму зміщується ближче до фронту ($\xi_{\max} = 0.254 \text{м}$), а амплітуда знижується.

На рисунку 3 наведено залежності відносного приросту дебіту $\eta_Q = Q_{\text{доб}} / Q_{\text{доб},0}$ від радіуса просування фронту горіння r_f, розраховані за формулою (27) при $R_{\text{к}} = 100$ м та $r_c = 0{,}1$ м для двотемпературної моделі з конвективним ореолом $L_{\text{еф}} = 7{,}7$ м (крива 1) та

класичної ступінчастої оцінки без урахування ореолу прогріву $L_{\text{еф}} = 0$ (крива 2). Порівняльний аналіз графіків свідчить, що на початковому етапі процесу ($r_f \to 0$) двотемпературна модель фіксує стартовий приріст продуктивності свердловини ($\eta_Q \approx 2,6$) за рахунок випереджального прогріву привибійної зони гарячими продуктами горіння на ширину ореолу $L_{\text{еф}}$, тоді як класична ступінчаста схема дає $\eta_Q = 1$. Зі збільшенням радіуса фронту обидві залежності монотонно й нелінійно зростають зі зростаючим градієнтом $d\eta_Q / dr_f$, оскільки зменшується логарифмічний фільтраційний опір зовнішньої холодної зони пласта $\ln\left(R_{\text{к}} / \left(r_f + L_{\text{еф}}\right)\right)$. У робочому діапазоні просування фронту $r_f = 20\ldots35$ м урахування конвективно-релаксаційного ореолу забезпечує зростання дебіту у $5,1\ldots7,6$ рази проти $3,6\ldots5,3$ рази за ступінчастою моделлю, тобто нехтування зоною теплової нерівноважності попереду фронту занижує розрахунковий дебіт свердловини на $25\ldots30\%$.

Висновки

Побудовано аналітичний розв'язок двотемпературної задачі конвективно-релаксаційного теплопереносу та отримано інженерно-аналітичні співвідношення для прогнозування продуктивності свердловини при циклічному внутрішньопластовому горінні високов'язкої нафти, що повністю реалізує поставлену мету дослідження. Зокрема, у межах першого завдання доведено, що за високих значень числа Пекле для газорідинного потоку ($\text{Pe}_1 \gg 1$) нехтування його молекулярною теплопровідністю порівняно з теплопровідністю мінерального скелета зводить вихідну систему рівнянь четвертого порядку в рухомих координатах до лінійного диференціального рівняння третього порядку з умовами стрибка другої похідної на фронті горіння.

У процесі вирішення другого завдання отримано замкнені елементарні формули для розподілу температур флюїду та твердої матриці в адіабатичному наближенні, а також визначено параметри хвилі міжфазного температурного напору попереду фронту. Установлено, що за базових параметрів колектора ($a = 12$ Вт/(м$^3 \cdot$К)) максимальна міжфазна нерівноважність досягає $554.0\,^{\circ}$C на відстані $\xi_{\max} = 0.383$ м попереду фронту, тоді як двократне збільшення об'ємного коефіцієнта теплообміну до 24 Вт/(м$^3 \cdot$К) зміщує точку екстремуму до 0.254 м.

За допомогою методу збурень виконано третє завдання та показано, що врахування бічних тепловтрат у покрівлю й підошву пласта ($\gamma_{\text{втр}} = 2.0\ldots10.0$ Вт/(м$^3 \cdot$К)) зміщує нульовий характеристичний корінь в область додатних значень ($\mu_0 = 0.1680\ldots0.6180$ м$^{-1}$). Отримані результати узгоджуються з фізичними очікуваннями та попередніми чисельними й експериментальними дослідженнями [1–3, 5]: вони аналітично пояснюють зниження пікової температури фронту з адіабатичних $1530\,^{\circ}$C до реальних пластових значень $698.5\ldots1158.6\,^{\circ}$C, формування куполоподібного температурного максимуму та ефект рекуперації тепла у вигорілій зоні внаслідок повільнішого остигання скелета породи порівняно з газовим потоком.

На виконання четвертого завдання методом сумарних фільтраційних опорів виведено розрахункову формулу для коефіцієнта відносного приросту дебіту свердловини з урахуванням ширини конвективного ореолу прогріву попереду фронту ($L_{\text{еф}} = 6.75\ldots8.19$ м). Розрахунки підтвердили, що просування фронту горіння на $r_f = 20\ldots35$ м забезпечує зростання дебіту у $4.5\ldots7.5$ рази завдяки зниженню в'язкості нафти та додатковому внеску прогрітого ореолу порівняно з класичною ступінчастою оцінкою при $L_{\text{еф}} = 0$.

Перспективи подальших досліджень у цьому напрямку полягають в узагальненні запропонованої аналітичної моделі на випадок багатофазної неізотермічної фільтрації зі змінними фазовими проникностями, урахуванні багатостадійної кінетики низько- й високотемпературного окиснення важкої нафти, а також моделюванні двовимірного теплопереносу в шарувато-неоднорідних продуктивних пластах.

Подяки

Відсутні.

Конфлікт інтересів

Відсутній.

Список використаних джерел

1. Смоловик Л. Р. Моделювання теплового впливу на поклади з високов'язкими нафтами. *Прикарпатський вісник НТШ. Число*. 2025. № 21(79). С. 147-153. DOI: https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-21(79)-147-153.

2. Sun J., Wang B., Shu Y., Wang Y., Pan Y., Tian C. The numerical simulation study on the heat transfer mechanism in heavy oil reservoirs during in-situ combustion. *Processes*. 2025. Vol. 13, No. 1. Article 56. DOI: https://doi.org/10.3390/pr13010056.

3. Antolinez J. D., Miri R., Nouri A. In Situ Combustion: A Comprehensive Review of the Current State of Knowledge. *Energies*. 2023. Vol. 16, No. 17. Article 6306. DOI: https://doi.org/10.3390/en16176306.

4. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. 5th ed. Cham : Springer, 2017. 988 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-49562-0.

5. Tao L., Hu Z., Xu Z., Zhang X., Ding Y., Wang C., Chen D., Li S. Experimental Investigation of In Situ Combustion (ISC) in Heavy Oil Thermal Recovery. *Geoenergy Science and Engineering*. 2024. Vol. 233. Article 212488. DOI: https://doi.org/10.1016/j.geoen.2023.212488.

6. Yang M., Chai M., Yuan S., Feng T., Wang S., Zhang J., Feng Q., Chen Z., Wei T., Wu G., Yu J. In-Situ Combustion for Heavy Oil and Oil Sands Recovery: Recent Progress, Field Applications, and Future Perspectives. *Energy & Fuels*. 2024. Vol. 38, No. 12. P. 10395–10420. DOI: https://doi.org/10.1021/acs.energyfuels.3c05067.

References

1. Smolovyk, L. R. (2025). Modeliuvannia teplovoho vplyvu na poklady z vysokoviazkymy naftamy [Modeling of thermal impact on heavy oil reservoirs]. *Prykarpatskyi Visnyk NTSh. Chyslo*, (21(79)), 147–153. https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-21(79)-147-153 (in Ukrainian)

2. Sun, J., Wang, B., Shu, Y., Wang, Y., Pan, Y., & Tian, C. (2025). The numerical simulation study on the heat transfer mechanism in heavy oil reservoirs during in-situ combustion. *Processes*, *13*(1), Article 56. https://doi.org/10.3390/pr13010056

3. Antolinez, J. D., Miri, R., & Nouri, A. (2023). In situ combustion: A comprehensive review of the current state of knowledge. *Energies*, *16*(17), Article 6306. https://doi.org/10.3390/en16176306

4. Nield, D. A., & Bejan, A. (2017). *Convection in porous media* (5th ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-49562-0

5. Tao, L., Hu, Z., Xu, Z., Zhang, X., Ding, Y., Wang, C., Chen, D., & Li, S. (2024). Experimental investigation of in situ combustion (ISC) in heavy oil thermal recovery. *Geoenergy Science and Engineering*, *233*, Article 212488. https://doi.org/10.1016/j.geoen.2023.212488

6. Yang, M., Chai, M., Yuan, S., Feng, T., Wang, S., Zhang, J., Feng, Q., Chen, Z., Wei, T., Wu, G., & Yu, J. (2024). In-situ combustion for heavy oil and oil sands recovery: Recent progress, field applications, and future perspectives. *Energy & Fuels*, *38*(12), 10395–10420. https://doi.org/10.1021/acs.energyfuels.3c05067

ANALYTICAL MODEL OF CONVECTIVE-RELAXATION HEAT TRANSFER AND WELL PRODUCTIVITY DURING IN-SITU COMBUSTION

Bandura A. I.
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
76019, 15 Karpatska St., Ivano-Frankivsk, Ukraine
https://orcid.org/0000-0003-0598-2237
e-mail: andriy.bandura@nung.edu.ua

Smolovyk L. R.
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
76019, 15 Karpatska St., Ivano-Frankivsk, Ukraine
https://orcid.org/0000-0003-4451-4508
e-mail: liliana.smolovyk@nung.edu.ua

Kopylov D. O.
Graduate Student
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
76019, 15 Karpatska St., Ivano-Frankivsk, Ukraine
https://orcid.org/0009-0003-5192-3702
e-mail: dmytro.kopylov-ngitphd@nung.edu.ua

Abstract. The purpose of this paper is to construct an analytical solution to the two-temperature problem of convective-relaxation heat transfer during cyclic in-situ combustion of high-viscosity crude oil and to derive engineering-analytical relationships for estimating the flow rate increment of a production well. The formation of a temperature field in a homogeneous oil-saturated reservoir is examined under conditions of high Peclet numbers for the gas-liquid heat transfer agent, where its molecular thermal conductivity is negligible compared to the longitudinal thermal conductivity of the solid rock matrix. The mathematical model accounts for local thermal disequilibrium between the moving fluid and the solid skeleton, as well as linear heat losses to the impermeable overburden and underburden of the productive layer according to the Newton-Lauwerier scheme. By transforming into a moving coordinate system attached to the combustion front and approximating the narrow coke oxidation zone as a point heat source, the initial fourth-order system of partial differential equations is reduced to a single third-order ordinary differential equation with derivative matching conditions at the front. In the adiabatic approximation, the characteristic equation factors into a zero root and a quadratic trinomial with a strictly positive discriminant, yielding closed-form elementary expressions for the phase temperature distributions, the interphase temperature head wave, and the coordinate of its maximum ahead of the combustion front. Using the perturbation method, it is demonstrated that accounting for lateral heat losses shifts the zero characteristic root into the domain of small positive values. This physically explains the reduction of the peak front temperature from an adiabatic value of 1530 °C to realistic reservoir values of 698.5–1158.6 °C, the formation of a dome-shaped temperature maximum, and thermal recuperation in the burned-out zone, where the rock matrix cools significantly slower than the gas stream. Based on the method of total filtration resistances, it is established that advancing the combustion front by 20–35 m, together with a convective heating aureole of 6.75–8.19 m in width, increases the well flow rate by a factor of 4.5–7.5 due to oil viscosity reduction.

Keywords: high-viscosity oil; interphase heat transfer; two-temperature porous medium; third-order characteristic equation; formation heat loss; interphase thermal non-equilibrium.